von H). Die dortigen Ringe Z und $K = \Gamma[t]$ brauchen zwar keine Quotientenkörper von Γ zu sein; häufig wird aber jeder von ihnen gewisse nicht in Γ gelegene Größen aus passenden Quotientenkörpern von Γ enthalten. Das ist für Z klar, gilt aber, wenn Γ kein Körper ist, auch für K; so kann z. B. t Nullstelle eines linearen Polynoms $ax+b$ sein, wo a ($\neq 0$) und b in Γ liegen, ohne daß t in Γ liegt.

Es bleibe hier nicht unerwähnt, daß Satz 6 jener Arbeit nach Anbringung der Berichtigung natürlich genau (nicht mehr, wie damals am Ende des § 5 behauptet, „in etwas allgemeinerer Fassung") auf den folgenden eleganteren Wortlaut hinauskommt:

In Satz 4 sei t algebraisch, $\mathfrak{m}$ ein kommutativer Ring ohne Nullteiler. Dann kann auch das dortige $\mathfrak{M}$ als kommutativer Ring ohne Nullteiler gewählt werden.

Denn ein äußerer Unterschied besteht nur noch darin, daß Satz 4 die besondere Voraussetzung macht, das Einheitselement von Γ sei für $\mathfrak{m}$ Einheitsoperator, während Satz 6 statt dessen voraussetzt: Liegt a in Γ, α in $\mathfrak{m}$ und ist $a \neq 0$, $\alpha \neq 0$, so ist $a\alpha \neq 0$. Aber da Γ Körper ist, so genügt $\mathfrak{m}$, außer wenn $\mathfrak{m}$ der Nullring und damit jede der beiden Behauptungen trivial ist, von selbst der Bedingung a) des Satzes 2 jener Arbeit; dieser lehrt also, daß die beiden obigen Zusatzvoraussetzungen gleichwertig sind.

Multiplikation zyklischer Normalringe.

Von Oswald Teichmüller in Göttingen.

K sei ein endlicher separabler Galoisscher Oberkörper des kommutativen Körpers P mit Abelscher Galoisscher Gruppe $\mathfrak{G}$. Ist Z ein i. b. a. P zyklischer Unterkörper von K und σ ein erzeugender Automorphismus von Z/P, so definieren wir folgendermaßen einen Charakter χ von $\mathfrak{G}$: Wenn $\tau \in \mathfrak{G}$, auf Elemente von Z angewandt, den Automorphismus σ^a ergibt (d. h. $x^\tau = x^{\sigma^a}$ für $x \in Z$), so sei $\chi(\tau) = e^{\frac{2\pi i a}{n}}$; hierin ist n der Grad $(Z:\mathrm{P})$. In demselben Sinne seien den zyklischen Unterkörpern Z', $\bar{Z}$ von K mit den erzeugenden Automorphismen σ', $\bar{\sigma}$ die Charaktere χ', $\bar{\chi}$ zugeordnet. Dann gilt die folgende Identität über zyklische verschränkte Produkte:

$$\text{Aus } \chi\chi' = \bar{\chi} \text{ folgt } (\alpha, Z, \sigma) \times (\alpha, Z', \sigma') \sim (\alpha, \bar{Z}, \bar{\sigma}).$$

Diesen Satz werden wir beweisen. Aber das ist nicht das Hauptziel der vorliegenden Arbeit, sondern nur das am leichtesten auszusprechende Teilergebnis. — Die in einer vorangehenden Arbeit „Verschränkte Produkte mit Normalringen" auseinandergesetzte Theorie der Normalringe wird hier besonders für den zyklischen Fall weiter ausgebaut, mit geeigneten Grunddefinitionen werden dabei zyklische Normalringe so multipliziert, daß eine Gruppe entsteht. Selbstverständlich steht das alles wieder mit den zugehörigen verschränkten Produkten in engstem Zusammenhang.

In den ersten 3 Abschnitten bringen wir vorbereitende Hilfssätze, in §§ 4—10 folgt dann die eigentliche Multiplikationstheorie. In den letzten 5 Abschnitten folgen einige Anwendungen und Beispiele. Z. B. werden wir den eingangs genannten Satz für algebraische Zahlkörper in § 12 direkt mit Hilfe der Klassenkörpertheorie beweisen. In §§ 13 und 14 werden zyklische Normalringe beschrieben, die in einer demnächst erscheinenden Arbeit über „p-Algebren" ihre Anwendung finden.

§ 1. Halbeinfache Systeme.

1. In der Algebra A seien h orthogonale Idempotente $e_1, \ldots, e_h$ mit der Summe 1 gegeben. Dann ist

$$e_1 A e_1 + \cdots + e_h A e_h \tag{1}$$

der Ring aller mit $e_1, \ldots, e_h$ vertauschbaren Elemente von A.

Denn jedes Element

$$a = e_1 a_1 e_1 + \cdots + e_h a_h e_h$$

ist mit e_i vertauschbar:

$$e_i a = e_i a_i e_i = a e_i.$$

Ist aber a mit allen e_i vertauschbar, so ist

$$a = 1a = e_1^2 a + \cdots + e_h^2 a = e_1 a e_1 + \cdots + e_h a e_h.$$

Daß die Summe der $e_i A e_i$ direkt ist, ist klar.

Wir interessieren uns hier für den Fall, daß A eine einfache und normale Algebra über dem Grundkörper P ist. Dann ist $e_i A e_i$ isomorph (i. d. a. P) dem (links geschriebenen) Automorphismenring des Rechtsideals $e_i A$ und daher eine zu A ähnliche einfache und normale Algebra über P.

Und für die Ränge gilt

$$\{e_i A e_i\}\{A\} = \{e_i A\}^2. \tag{2}$$

2. Bekanntlich ist jedes halbeinfache System S direkte Summe einfacher Systeme $e_1 S = S e_1, \ldots, e_h S = S e_h$, wo $e_1, \ldots, e_h$ die primitiven Zentrumsidempotente von S sind und daher orthogonale Idempotente mit der Summe 1 sind.

Wir denken nun das halbeinfache System S so in das einfache und normale System A eingebettet, daß das Einselement 1 von S mit dem von A zusammenfällt. Dann genügen die primitiven Zentrumsidempotente $e_1, \ldots, e_h$ von S den Voraussetzungen von § 1, **1.** Der Ring T der mit allen Elementen von S vertauschbaren Elemente von A ist deshalb in (1) enthalten. Ein Ausdruck

$$e_1 a_1 e_1 + \cdots + e_h a_h e_h$$

liegt aber offensichtlich dann und nur dann in T, wenn jedes $e_i a_i e_i$ mit allen Elementen von $e_i S = S e_i$ vertauschbar ist. T ist also direkte Summe $T = T_1 + \cdots + T_h$, wo T_i der Ring aller mit $e_i S$ elementweise vertauschbaren Elemente der einfachen und normalen Algebra $e_i A e_i$ ist.

$e_i S$ ist aber einfach und enthält das Einselement e_i von $e_i A e_i$. Daher ist auch T_i ein einfaches System mit dem Einselement e_i, und $e_i S$ ist der Ring aller mit T_i elementweise vertauschbaren Elemente von $e_i A e_i$, und es besteht die Rangrelation

$$\{e_i S\}\{T_i\} = \{e_i A e_i\}\ ^{1)}. \tag{3}$$

Durch direkte Summation über i erhalten wir: $e_1, \ldots, e_h$ sind auch die primitiven Zentrumsidempotente des halbeinfachen Systems T. S ist der Ring aller mit T elementweise vertauschbaren Elemente von A [2]).

Dagegen kann man aus dem Rang von S nicht etwa den Rang von T berechnen. Derartige Schlüsse sind nur in Spezialfällen möglich.

3. Ist S kommutativ, so gilt bekanntlich

$$\{e_i S\} \leq \sqrt{\{e_i A e_i\}} = \frac{\{e_i A\}}{\sqrt{\{A\}}},$$

letzteres nach (2). Bei Summation ist

$$\{e_1 A\} + \cdots + \{e_h A\} = \{A\}, \tag{4}$$

mithin

$$\{S\} \leq \sqrt{\{A\}}.$$

Hier steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn alle

$$\{e_i S\} = \sqrt{\{e_i A e_i\}}$$

sind; bekanntlich gilt aber dies dann und nur dann, wenn alle $e_i S = T_i$ sind. Also:

Für kommutatives S gilt $\{S\} \leq \sqrt{\{A\}}$; $\{S\} = \sqrt{\{A\}}$ gilt dann und nur dann, wenn S in A maximalkommutativ ist (d. h. wenn $T = S$).

Für nicht notwendig kommutatives S folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{h} \sqrt{\{e_i S\}}\sqrt{\{T_i\}}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{h} \{e_i S\}\right)\left(\sum_{i=1}^{h} \{T_i\}\right)$$

nach (3), (2) und (4)

$$\{A\} \leq \{S\}\{T\}.$$

Hier steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die $\{e_i S\}$ proportional den $\{T_i\}$ sind. Letzteres ist z. B. erfüllt, wenn alle $e_i S$ durch innere Automorphismen von A ineinander übergeführt werden können. Dann sind nämlich erstens alle $e_i S$ i. b. a. P isomorph, darum hängt $\{e_i S\}$ nicht von i ab; zweitens gehen dann die e_i, also auch die Algebren $e_i A e_i$, durch Automorphismen von A i. b. a. P ineinander über und haben daher gleichen Rang; wegen (3) hängt dann auch $\{T_i\}$ nicht von i ab. Also:

Kann man die einfachen direkten Summanden von S durch innere Automorphismen von A ineinander überführen, so gilt

$$\{A\} = \{S\}\{T\}.$$

4. S und S' seien nun zwei halbeinfache Systeme, die beide so in das einfache und normale A eingebettet sind, daß ihre Einselemente mit dem Einselement von A übereinstimmen. Ferner sei ein Isomorphismus $S \cong S'$ i. b. a. P gegeben. Unter welchen Voraussetzungen läßt er sich zu einem inneren Automorphismus von A fortsetzen?

[1]) E. Noether, Nichtkommutative Algebra, Math. Z. 37.

[2]) B. L. v. d. Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 4, § 12.